MATHÉMATIQUES

(Option générale)

DEUXIÈME COMPOSITION

Durée : 3 heures

PROBLÈME N° 1

Soit E, espace vectoriel de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$) sur $\mathbb{R}$.

Soit $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans lui-même. On notera dans $\mathcal{L}(E)$, $fg = f \circ g$, $f^2 = f \circ f$; e désignera l'application identique de E dans lui-même. $\mathrm{Im} f$ est l'image de E pour f, $\mathrm{Ker} f$ est le noyau de f

I

1° On considère $f \in \mathcal{L}(E)$, tel que $f^2 = f$.

a. Posant $f_1 = e - f$, montrer que l'on a $f_1^2 = f_1$.

b. Montrer que l'on a $\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker} f_1$.

c. Montrer que l'on a $\mathrm{Im} f_1 = \mathrm{Ker} f$.

d. Montrer que $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f$ sont supplémentaires dans E.

e. Montrer que les seuls nombres réels pouvant être valeur propre pour f sont 0 et 1.

2° On considère $f \in \mathcal{L}(E)$, $g \in \mathcal{L}(E)$, vérifiant les relations :

$$f^2 = f \; ; \quad g^2 = g \; ; \quad fg = gf$$

a. Montrer que $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f$ sont deux sous-espaces de E stables par l'application g.

b. Soit g_0 l'application de $\mathrm{Ker} f$ dans lui-même, définie comme restriction de g au sous-espace stable $\mathrm{Ker} f$. Que peut-on dire de g_0^2?

Comparer les sous-espaces $\mathrm{Ker}\, g_0$ et $\mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Ker} f$, $\mathrm{Im}\, g_0$ et $\mathrm{Im}\, g \cap \mathrm{Ker} f$.

c. Soit g_1 l'application de $\mathrm{Im} f$ dans lui-même, définie comme restriction de g au sous-espace stable $\mathrm{Im} f$. Que peut-on dire de g_1^2?

Comparer les sous-espaces :

$$\mathrm{Ker}\, g_1 \text{ et } \mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Im} f$$
$$\mathrm{Im}\, g_1 \text{ et } \mathrm{Im}\, g \cap \mathrm{Im} f$$

d. Déduire de l'ensemble des résultats obtenus que les quatre sous-espaces :

E_1 $\mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Ker} f$ $\qquad$ $E_3 = \mathrm{Im} g \cap \mathrm{Ker} f$

$E_2 = \mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Im} f$ $\qquad$ $E_4 = \mathrm{Im} g \cap \mathrm{Im} f$

forment une somme directe généralisée, c'est-à-dire que pour tout x, $x \in E$, il existe un quadruplet unique (x_1, x_2, x_3, x_4) $(x_i \in E_i, \; i = 1, 2, 3, 4)$ tel que :

$$x = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

e. Soit, pour $i = 1, 2, 3, 4$, $\mathcal{B}_i$ une base de E_i.

On considère $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3 \cup \mathcal{B}_4$, famille obtenue en réunissant les quatre bases $\mathcal{B}_i$ dans cet ordre. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E, et déterminer les matrices respectives de f et g relativement à la base $\mathcal{B}$.

f On suppose ici en outre que aucun des espaces E_i ($i = 1, 2, 3, 4$) n'est réduit à $\{\vec{0}\}$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer suivant les valeurs de α le nombre des valeurs propres distinctes de l'application linéaire $f + \alpha g$.

II

Dans cette partie, on suppose $n = 5$, et E est muni d'une base

$$\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}.$$

Soient f et g les applications linéaires de E dans lui-même, dont les matrices

$$F = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0} f, \quad G = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0} g$$

relativement à $\mathcal{B}_0$ sont :

$$F = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 & -1/3 & -1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/6 & -1/3 & 1/6 & 2/3 & -1/3 \\ 1/6 & -1/3 & 1/6 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} ;$$

.../...

$$G = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

1° Sans chercher à vérifier que f et g satisfont aux conditions du I.2°, déterminer les sous-espaces E_1, E_2, E_3, E_4 définis au 2°d, dans ce cas particulier.

Donner une base, aussi simple que possible, pour chacun d'entre eux.

2° Construire une base de E relativement à laquelle les matrices de f et de g soient toutes deux diagonales,
et donner les matrices de f et g dans cette nouvelle base.

En déduire que f et g satisfont aux conditions du I.2°.

3° Calculer l'inverse de la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4° Soit α un nombre réel. On considère la matrice :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\alpha \end{pmatrix}$$

Exprimer la matrice $(F + \alpha G)^i$ $(i \in \mathbf{N}^*)$ en fonction de M, de M^{-1} et de D.

PROBLÈME N° 2

Soient k et n deux nombres entiers, tels que $1 \leqslant k \leqslant n$.

Soit $E = \{1, 2, ..., n\}$ l'ensemble des nombres entiers compris entre 1 et n.

Soit une urne contenant n objets numérotés de 1 à n, et que l'on représentera par l'ensemble E. On choisit au hasard, par un procédé quelconque, k objets distincts de l'urne, de manière à ce que tous les résultats possibles de cette épreuve aient la même probabilité de se produire.

L'épreuve effectuée, on relève les numéros des k objets ainsi choisis et l'on définit X, variable aléatoire égale au plus petit des k numéros relevés.

1° Quels sont les nombres i tels que $P\{X = i\} \neq 0$?

2° Donner la loi de la variable X.

3° Donner une expression de E(X), espérance mathématique de X.

4° On pose $S_{(n,k)} = C_n^k . E(X)$.

Quelle est la valeur de $S_{(n,1)}$? de $S_{(n,n)}$?

Établir une relation, pour $1 < k < n$, entre :

$$S_{(n,k)}, \quad S_{(n-1,k)}, \quad S_{(n-1,k-1)}$$

Présenter dans un tableau les valeurs de $S_{(n,k)}$ pour :

$$0 < k \leqslant n \leqslant 4$$

Montrer que :

$$S_{(n,k)} = C_{n+1}^{k+1}.$$

En déduire la valeur de E(X).

-FIN-